Geometría II

Examen II

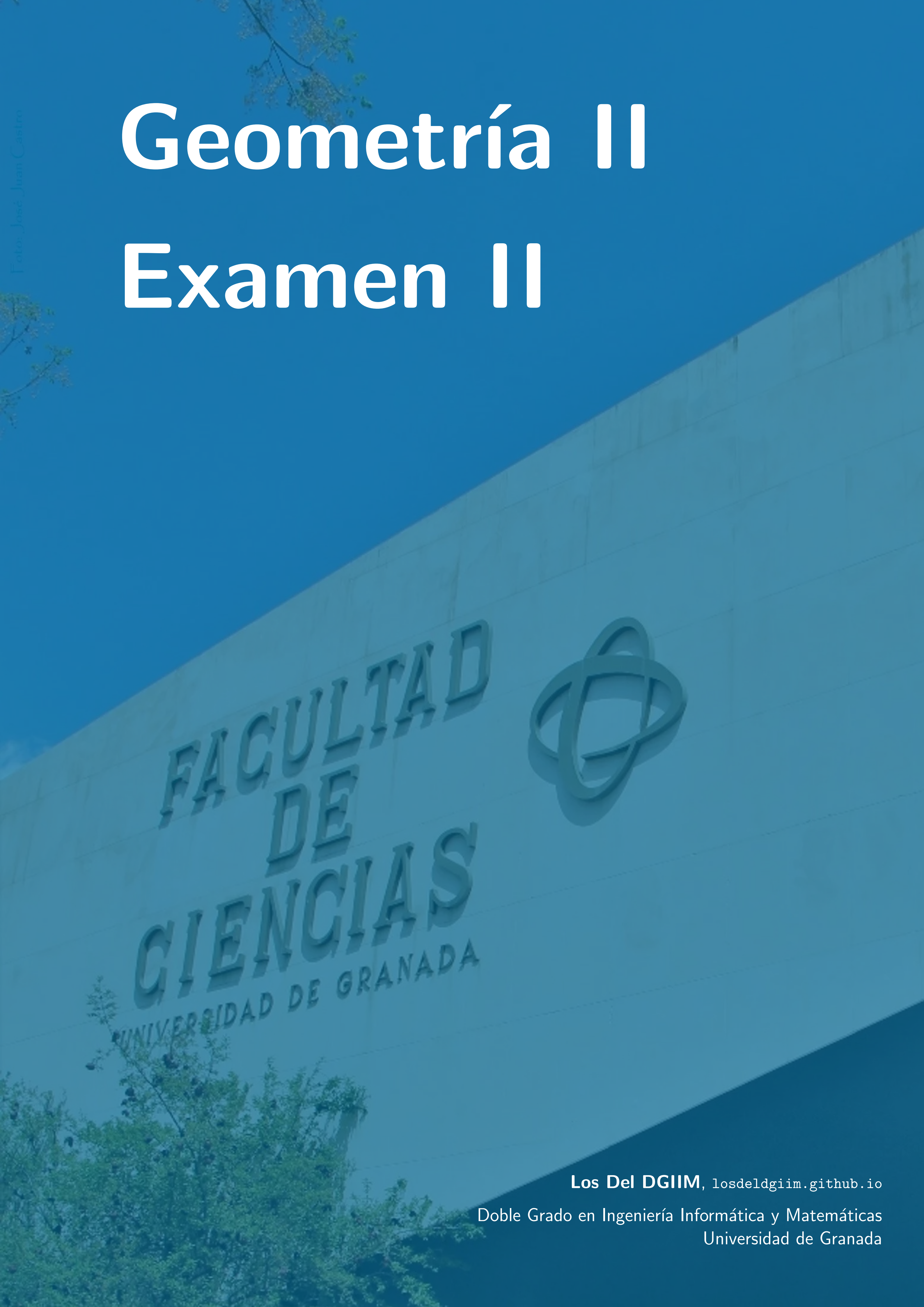

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Geometría II
Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría II.

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Ros Mulero.

Descripción Parcial del Tema 1 de Incidencias. Diagonalización.

Fecha 12 de abril de 2023.

Duración 60 minutos.

Ejercicio 1 (6 ptos)**.** Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base usual es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a & 1-a & -a \\ a & 0 & a-1 \end{pmatrix} \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. Encontrar los valores de a para los que f es diagonalizable.

   Calculamos el polinomio característico de A:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} -\lambda_0 & 0 & 1 \\ -a & 1-a-\lambda_0 & -a \\ a & 0 & a-1-\lambda_0 \end{vmatrix} = (1-a-\lambda_0)\begin{vmatrix} -\lambda_0 & 1 \\ a & a-1-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$
$$= (1-a-\lambda_0)\begin{vmatrix} -\lambda_0 & 1+\lambda_0 \\ a & -1-\lambda_0 \end{vmatrix} = (1-a-\lambda_0)(1+\lambda_0)\begin{vmatrix} -\lambda_0 & 1 \\ a & -1 \end{vmatrix} =$$
$$= (1-a-\lambda_0)(1+\lambda_0)(\lambda_0 - a)$$

   Por tanto, los valores propios son: $\{1-a, -1, a\}$:

$$1 - a = a \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2} \qquad 1 - a = -1 \Longleftrightarrow a = 2 \qquad -1 = a$$

   Por tanto, distinguimos según los valores de a:

   - Para $a \neq -1, \frac{1}{2}, 2$:

     Tenemos que tiene tres valores propios distintos, por lo que es diagonalizable.

   - Para $a = -1$:

     Tenemos que la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es doble. Veamos su multiplicidad geométrica:

$$V_{-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

     Por tanto, como la multiplicidad geométrica es distinta a la algebraica $(1 \neq 2)$, tenemos que no es diagonalizable.

   - Para $a = \frac{1}{2}$:

     Tenemos que la multiplicidad algebraica de $\lambda = \frac{1}{2}$ es doble. Veamos su multiplicidad geométrica:

$$V_{\frac{1}{2}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -\frac{1}{2}x_1 + x_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

     Por tanto, como la multiplicidad geométrica es distinta a la algebraica $(1 \neq 2)$, tenemos que no es diagonalizable.

- Para $a = 2$:

  Tenemos que la multiplicidad algebraica de $\lambda = -1$ es doble. Veamos su multiplicidad geométrica:

  $$V_{-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

  Por tanto, como la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica (2), tenemos que sí es diagonalizable.

Por tanto, tenemos que A es diagonalizable $f\forall a \neq \{-1, \frac{1}{2}\}$.

2. Para $a = 1$, estudiar si las matrices A y A^2 son semejantes y diagonalizar alguna de ellas, si ello es posible.

   Diagonalizamos en primer lugar A. Tenemos que tiene tres valores propios distintos $\{-1, 0, 1\}$, por lo que calculamos los subespacios propios:

   $$V_{-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

   $$V_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

   $$V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

   Por tanto, tenemos que $D = P^{-1}AP$, con:

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

   Por tanto, $A = PDP^{-1}$. Calculamos ahora A^2:

   $$A^2 = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

   Tenemos que:

   $$A \sim D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 \sim D^2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

   Como tanto, como $D \neq D^2$, tenemos que $A \nsim A^2$.

Ejercicio 2 (4 ptos)**.** Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Sobre el cuerpo de los complejos, si la matriz cuadrada A de orden 4 verifica $|A| = -1$, entonces A es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que $|A| = -1$, y calculemos su polinomio característico:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda_0 I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda_0 \end{vmatrix} = -(1-\lambda_0)^3(1+\lambda_0)$$

   Por tanto, tenemos que los valores propios son $\lambda_0 = \{-1, 1\}$. Calculamos la multiplicidad geométrica de $\lambda_0 = 1$.

$$V_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

   Por tanto, tenemos que la multiplicidad algebraica del 1 es 3, pero su multiplicidad geométrica es 2. Por tanto, tenemos que no es diagonalizable.

   El enunciado, por tanto, es falso.

2. Si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ verifica $A^3 + A = 0$, entonces A es diagonalizable.

   Tenemos que $A^3 = -A$. Sea el contraejemplo siguiente:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

   Tenemos que no es digonalizable pero se cumple que $A^3 = -Id$.

   Observación. Se trata de un giro de $\theta = \frac{\pi}{3}$ en el plano.